Ein modal-logisches Modell für Syllogismen

von Peter Zahn

In der traditionellen Syllogistik wurde die Meinung vertreten, man dürfe von

Alle Engel haben Flügel

auf

Einige Engel haben Flügel

schließen, und zwar unabhängig davon, ob es Engel gibt. Im gegenwärtigen, von der Quantorenlogik beeinflussten Sprachgebrauch bedeutet die Konklusion jedoch, dass es mindestens einen Engel gibt, der Flügel hat. Um im Falle, dass es keine Engel gibt, wie angegeben schließen zu dürfen, liegt es nahe, die Aussage „Alle Engel haben Flügel" inhaltlich im Sinne von „(Flügel haben) ist enthalten in (Engel)" zu verstehen.

Demgemäß könnte man sagen, der Begriffsinhalt (weiblicher Mensch) bestünde aus (weiblich) und (Mensch), jener enthalte also diese beiden. Dies entspricht der Formel

x ε weiblicher Mensch gdw. x ε weiblich und x ε Mensch.

(„ε" stehe für „ist (ein)" o.ä., „gdw." für „genau dann, wenn".) Wären alle Begriffe entweder \`einfach´ oder wie in diesem Beispiel aus einfachen Begriffen mittels „und" zusammengesetzt, so könnten wir unter dem Inhalt eines Begriffs die Gesamtheit aller einfachen Begriffe verstehen, aus denen er zusammengesetzt ist. Es gibt aber Begriffe, z.B. (flügellos) im Sinne von (nicht geflügelt), die auf andere Weise zusammengesetzt sind, und solche, deren Zusammensetzung nicht ersichtlich ist. Dass z.B. der Inhalt des Begriffs (Möbel) in dem des Begriffs (Stuhl) enthalten sei, könnte man dadurch zu erklären versuchen, dass alle Möbel-Eigenschaften (einschließlich Verwendungszwecken) auch Stuhl-Eigenschaften sind. Doch dies wäre wohl nicht ganz überzeugend.

Im Folgenden möchte ich jedoch nicht mehr von Begriffen, sondern von <u>Prädikatoren</u> reden. Dies sind Worte (z.B. Eigenschaftsworte, Sammelnamen, Verben) oder längere Teile von Elementaraussagen, die man mehreren Gegenständen, Geschehnissen oder einzelnen Handlungen zusprechen kann. – Ich hole etwas weiter aus:

Elementaraussagen – kurz: E-Aussagen – seien Aussagen (Beschreibungs- oder Behauptungssätze), die nicht aus anderen Aussagen zusammengesetzt sind. Sie haben im einfachsten, idealen Falle die Form

$$(N1, ..., Nk) \,\varepsilon\, P \quad \text{oder} \quad P(N1, ..., Nk)$$

mit Nominatoren (Eigennamen o.ä.) N1, ..., Nk ($k \geq 1$) und einem Prädikator P. Es gibt aber auch komplizierter aufgebaute E-Aussagen.

Nach bestimmten sprachlichen Konventionen (Gepflogenheiten oder idealerweise expliziten \`Spiel-Regeln´), sollte man manche E-Aussagen erst dann behaupten, wenn man eine bestimmte Wahrnehmung oder Beobachtung gemacht oder ein bestimmtes Resultat einer Handlung (z.B. einer Messung) erhalten hat. Derartige Konventionen nenne ich **extern** (weil sie auf i.Allg. Nicht-Sprachliches Bezug nehmen) und setze sie als gegeben voraus.

Mehrere E-Aussagen können jedoch voneinander \`abhängen´ auf Grund weiterer Regeln, die (sprach-) **intern** heißen mögen. Beispiele: Falls „Dies ist ein Käfer“ behauptet werden darf, dann auch „Dies ist ein Insekt“, aber nicht „Dies ist eine Fliege“. Solche Regeln haben Kamlah und Lorenzen Prädikatorenregeln genannt (s. [3], S. 182). Auf Grund dieser und weiterer Regeln dürfen wir behaupten „Alle Käfer sind Insekten“ und „Käfer sind keine Fliegen“.

Rekonstruktionvorschlag (idealisierend): Zunächst sei $\perp$ eine spezielle E-Aussage (oder ein Dummy), für die eine interne Regel laute: Behaupte nicht $\perp$! Zu den internen Regeln mögen aber auch in unserer Sprachgemeinschaft geltende Regeln gehören, nach denen E-Aussagen wie in den soeben angeführten Beispielen voneinander abhängen; d.h. diese **internen Regeln** mögen für einzelne E-Aussagen E1, ..., En, E Instanzen (Einzelfälle) folgender Form (mit „$\Rightarrow$“ als Regelpfeil) haben:

$$E1, ..., En \Rightarrow E,$$

in Worten: Behaupte E1, ..., En (insgesamt) **erst** dann, wenn auch E schon behauptet werden darf, d.h. die Behauptung von E keine andere interne oder externe Konvention mehr verletzen würde (Genaueres s. [6], S 5f.). Hierfür sagen wir auch, E könne schon zu Recht behauptet werden. Man darf die internen Regeln also auf schon zu Recht behauptete E-Aussagen schrittweise wie Kalkülregeln anwenden.

Beispiele interner Regeln:

$$x \mathrel{\varepsilon} \text{Käfer} \;\Rightarrow\; x \mathrel{\varepsilon} \text{Insekt.}$$
$$x \mathrel{\varepsilon} \text{Insekt},\; x \mathrel{\varepsilon} \text{Spinne} \;\Rightarrow \bot\,.$$

Hiernach darf man für kein Tier sowohl behaupten, es sei ein Käfer, als auch, es sei eine Spinne.

Zur Regelung des Gebrauchs von Aussagen, die aus E-Aussagen mit Hilfe von Junktoren und Quantoren wie üblich aufgebaut sind, nehmen wir zu den angeführten Regeln für E-Aussagen noch die \`Regeln des natürlichen Schließens´ - kurz: RnS - von Gerhard Gentzen [2] als interne Regeln hinzu. Nach ihnen darf man alle bekannten logischen Schlussregeln anwenden. Auch Definitionen zählen wir zu den internen Regeln. (Dabei seien Definitionen der Form b:=a mit echten Teilen a, b von E-Aussagen ersetzt durch Paare E(a) <=> E(b) von Schlüssen.)

Beispiel einer Herleitung nach internen Regeln:

$$[\; x \mathrel{\varepsilon} \text{Käfer}\;\; \text{(Annahme)}$$
$$x \mathrel{\varepsilon} \text{Insekt}\;]$$
$$x \mathrel{\varepsilon} \text{Käfer} \rightarrow x \mathrel{\varepsilon} \text{Insekt}$$
$$\forall x\, (x \mathrel{\varepsilon} \text{Käfer} \rightarrow x \mathrel{\varepsilon} \text{Insekt}).$$

Im Folgenden stehen P, Q, R für beliebige ein- oder mehrstellige Prädikatoren, x für Variablen-Tupel (x1, …, xk) ($k \geq 1$) und „:=“ bzw. „:gdw.“ als Definitionszeichen. Wir definieren zunächst einige Schreib- und Redeweisen quantorenlogisch:

$$P \subseteq Q \quad \text{:gdw.} \quad \text{Alle P sind Q} \quad \text{:gdw.} \quad \forall x\, (x \mathrel{\varepsilon} P \rightarrow x \mathrel{\varepsilon} Q)$$

$$P \heartsuit Q \quad \text{:gdw.} \quad \text{Einige P sind Q} \quad \text{:gdw.} \quad \exists x\, (x \mathrel{\varepsilon} P \wedge x \mathrel{\varepsilon} Q)$$

$$\text{Kein P ist Q} \quad \text{:gdw.} \quad \text{Nicht einige P sind Q} \quad \text{:gdw.} \quad \neg(P \heartsuit Q)$$

$$\text{Einige P sind nicht Q} \quad \text{:gdw.} \quad \text{Nicht alle P sind Q} \quad \text{:gdw.} \quad \neg(P \subseteq Q).$$

Man darf also wie folgt schließen:

Alle Käfer sind Insekten
<u>Kein Insekt ist eine Spinne</u>
Kein Käfer ist eine Spinne.

Anmerkung: Verzichtet man darauf, zu sagen „Einige P sind nicht Q“ für „Nicht alle P sind Q“, so genügt es im Folgenden, effektiv-logisch zu schließen.

Für Aussagen A definieren wir nun deren **Notwendigkeit** und deren **Möglichkeit** (beide von spezieller Art):

$\Box A$:gdw. A ist notwendig
:gdw. Nach den internen Regeln ist A herleitbar.

∇A :gdw. A ist möglich
:gdw. $\neg\Box\neg A$
:gdw. Es ist nicht notwendig, dass nicht A.

Somit bedeutet z.B. „∇(Einige Engel haben Flügel)“, dass es nach den internen Regeln nicht herleitbar ist, dass es keine Engel mit Flügeln gibt. Daraus folgt aber nicht, dass es Engel mit Flügeln gibt.

Ferner bedeutet insbesondere „$\Box$(Kein P ist P)“, dass $\neg\exists x\,(x\ \varepsilon\ P)$ nach den internen Regeln herleitbar ist. In diesem Falle ist für beliebige Nominatoren-Tupel N aus N ε P nach den internen Regeln $\perp$ herleitbar. Dafür wollen wir sagen, P sei widerspruchsvoll (vgl. [1], [4]). Ist hingegen P widerspruchsfrei, dann gilt also $\nabla(P\heartsuit P)$.

Nun ist folgende modal-logischen Schlussregeln zulässig (gültig):

$$\Box(A \to B),\ \Box A \ \Rightarrow\ \Box B.$$

Wir fügen sie (für $\Box$-freie Aussageformen statt nur Aussagen A, B) zu den RnS. Dann gilt:

(1) $\Box A \wedge \Box B \ \leftrightarrow\ \Box(A \wedge B).$

(2) $\Box(A \wedge B \to C) \ \to\ (\Box A \wedge \Box B \to \Box C).$

(3) $\Box(A \wedge B \to C) \ \to\ (\Box A \wedge \nabla B \to \nabla C).$

Beweisskizze zu (3): $\Box(A \wedge B \to C) \to \Box(A \wedge \neg C \to \neg B) \to$

$$\to (\Box A \wedge \Box\neg C \to \Box\neg B) \to (\Box A \wedge \nabla B \to \nabla C).$$

Anmerkung: Im Folgenden gelangt man zu denselben Ergebnissen, wenn man $\Box A$ allgemeiner definiert als: A ist durch Anwendungen der RnS und Definitionen herleitbar aus akzeptierten Hypothesen und als gesichert geltenden \`Tatsachen´ je einer gegebenen Art.

Wir können nun einige traditionell übliche Schreibweisen so interpretieren:

$$PaQ \text{ als } \Box(P \subseteq Q), \qquad PeQ \text{ als } \Box\neg(P \heartsuit Q),$$

$$PoQ \text{ als } \nabla\neg(P \subseteq Q), \qquad PiQ \text{ als } \nabla(P \heartsuit Q).$$

Mit Hilfe der RnS und (2), (3) ergibt sich (z.T. durch Kontraposition), dass man $\Box(P \subseteq P)$ behaupten und z.B. wie folgt \`**syllogistisch**´ schließen darf:

$$\Box(P \subseteq Q),\ \Box(Q \subseteq R) \Rightarrow \Box(P \subseteq R)$$

$$\Box(P \subseteq Q),\ \Box\neg(Q \heartsuit R) \Rightarrow \Box\neg(P \heartsuit R)$$

$$\Box(P \subseteq Q),\ \nabla\neg(P \subseteq R) \Rightarrow \nabla\neg(Q \subseteq R)$$

$$\Box(P \subseteq Q),\ \nabla(P \heartsuit R) \Rightarrow \nabla(Q \heartsuit R)$$

$$\nabla\neg(P \subseteq R),\ \Box(Q \subseteq R) \Rightarrow \nabla\neg(P \subseteq Q)$$

$$\nabla(P \heartsuit R),\ \Box\neg(Q \heartsuit R) \Rightarrow \nabla\neg(P \subseteq Q)$$

$$\Box(P \subseteq Q),\ \nabla(P \heartsuit P) \Rightarrow \nabla(P \heartsuit Q)$$

$$\Box(P \subseteq Q),\ \Box(P \subseteq R),\ \nabla(P \heartsuit P) \Rightarrow \nabla(Q \heartsuit R)$$

$$\Box(P \subseteq Q),\ \Box\neg(P \heartsuit R),\ \nabla(P \heartsuit P) \Rightarrow \nabla\neg(Q \subseteq R).$$

Nach dem drittletzten Syllogismus dürfen wir von „$\Box$(Alle Engel haben Flügel)“ auf „∇(Einige Engel haben Flügel)“ schließen, falls der Begriff „Engel“ widerspruchsfrei ist. (Diese Idee, die Widerspruchsfreiheit von Begriffen vorauszusetzen, stammt in anderer Form aus [1].)

Auch die übrigen (der insgesamt 24) bekannten zulässigen Syllogismen gehen bei unserer Interpretation über in ebenfalls zulässige Schlussregeln, jedoch ggf. mit einer zusätzlichen Prämisse der Form $\nabla(P\heartsuit P)$.

Anmerkung: Nach [5], 3.3.4 sind alle Syllogismen mit Hilfe der Junktorenlogik herleitbar aus den folgenden Axiomen:

$$\begin{aligned} PaQ, QaR &\to PaR \\ PaQ, QeR &\to PeR \\ PeQ &\to QeP \\ PiQ &\leftrightarrow \neg PeQ \\ PoQ &\leftrightarrow \neg PaQ. \end{aligned}$$

Zusammengesetzte Prädikatoren

Bisher haben wir nur \`elementare´ Prädikatoren P betrachtet, d.h. solche, für welche die Formel „x ε P“ elementar ist. Doch obwohl die Formel „x ε P und x ε Q“ zusammengesetzt ist, kann man auch den durch

$$x \;\varepsilon\; P\cap Q \;\; :\text{gdw.} \;\; x \;\varepsilon\; P \wedge x \;\varepsilon\; Q$$

definierten Prädikator $P\cap Q$ als elementar auffassen, da man diese Definition durch folgende internen Regeln ersetzen kann:

$$\begin{aligned} x \;\varepsilon\; P,\; x \;\varepsilon\; Q &\Rightarrow x \;\varepsilon\; P\cap Q \\ x \;\varepsilon\; P\cap Q &\Rightarrow x \;\varepsilon\; P \\ x \;\varepsilon\; P\cap Q &\Rightarrow x \;\varepsilon\; Q. \end{aligned}$$

Der bisherige Rahmen wird jedoch gesprengt, wenn wir noch Prädikatoren der Formen $P\cup Q$ und $\overline{P}$ einführen durch

$$\begin{aligned} x \;\varepsilon\; P\cup Q \;\; &:\text{gdw.} \;\; x \;\varepsilon\; P \vee x \;\varepsilon\; Q \\ x \;\varepsilon\; \overline{P} \;\; &:\text{gdw.} \;\; \neg\, x \;\varepsilon\; P. \end{aligned}$$

Mengen- und Relationssymbole

Es liegt nahe, auch Relationssymbole {(x1,…,xk): A(x1,…,xk)} mit beliebigen Aussageformen A(x1,…,xk) (z.B. 1. Stufe) als Prädikatoren zu verwenden. Dies könnte jedoch versehentlich zu falschen Schlüssen verleiten.

Beispiel dazu: Zu den internen Regeln zählen wir nun noch

$$„\Rightarrow\ x=x“\ \text{sowie}\ „y \in \{x: A(x)\} <=> A(y)“.$$

„R(x)“ bedeute jetzt „x hat rote Haare.“ N (:= Nora) habe rote Haare. Dann gilt R(N), also

$$\{x: x=N \vee R(x)\} = \{x: R(x)\},$$

ferner $\square(N=N)$, also $\square(N=N \vee R(N))$, also

$$\square(N \in \{x: x=N \vee R(x)\}),$$

aber nicht $\square R(N)$, also

$$\text{nicht } \square(N \in \{x: R(x)\}).$$

Dies widerspricht aber unserem gewohnten Verständnis des Gleichheitszeichen, wonach gilt: $X=Y \wedge B(X) \rightarrow B(Y)$ (Invarianz von B(X) bezüglich =). Die Verwendung von Mengen- oder allgemeiner \`extensionalen´ Relationssymbolen im Bereich des Operators $\square$ kann also zu falschen Schlüssen verleiten.

Um dies zu vermeiden, verwenden wir an Stelle von extensionalen Relationssymbolen (leider unübliche) Symbole der Form

$$[(x1,...,xk): A(x1,...,xk)]$$

im Bereich von $\square$, definieren

$$(N1,...,Nk)\ \varepsilon\ [(x1,...,xk): A(x1,...,xk)]\ \ \text{:gdw.}\ \ A(N1,...,Nk),$$

und zählen diese Symbole zu den Prädikatoren. Ferner definieren wir Gleichungen zwischen beliebigen Prädikatoren durch

$$P=Q\ \ \text{:gdw.}\ \ \square(P \subseteq Q\ \wedge\ Q \subseteq P).$$

Beispiel: Fernsprecher = Telefon. Für elementare Prädikatoren P gilt P = [x: x ε P]. (Man könnte auch $\square(P=Q)$ statt P=Q schreiben.)

Eine Aussageform Ax (mit x ≡ (x1, ..., xk)) heiße <u>intensional äquivalent</u> zu Bx :gdw. $\square \forall x\ (Ax \leftrightarrow Bx)$ (vgl. [3], S. 190). Es gilt

$$[x: Ax]=[x: Bx] \leftrightarrow \square \forall x\ (Ax \leftrightarrow Bx),$$

und die in den oben angeführten Syllogismen vorkommenden Aussagen sind invariant bezüglich =. Daher dienen uns die Symbole der Form [(x1,...,xk): A(x1,...,xk)] als Abstrakta für Aussageformen A(x1,...,xk) bezüglich derer intensionalen Aquivalenz. Man könnte diese Symbole intensionale Relationssymbole oder im Falle k=1 Begriffssymbole nennen. (In der \`Formalen Begriffsanalyse´ versteht man unter (formalen) Begriffen etwas anderes.)

Die Menge der Prädikatoren 1. Stufe bildet mit der Relation

$\{(P,Q): \Box(P \subseteq Q)\}$ (2. Stufe) einen **Booleschen Verband** (vgl. [4], S.30f.).

An Stelle seiner Vollständigkeit können wir nur Folgendes zeigen: Ist P(y) eine ein Term derart, dass P(N) für jeden Nominator N ε Q ein Prädikator ist, so ist $[x: \forall y\ \varepsilon\ Q\ (x\ \varepsilon\ P(y))]$ bzw. $[x: \exists y\ \varepsilon\ Q\ (x\ \varepsilon\ P(y))]$ *eine* untere bzw. obere Schranke der Menge $\{P(y): \Box(y\ \varepsilon\ Q)\}$. Denn für beliebige Prädikatoren S gilt

$$\Box\, S \subseteq [x: \forall y\ \varepsilon\ Q\ (x\ \varepsilon\ P(y))] \leftrightarrow \Box \forall y\ \varepsilon\ Q\ (S \subseteq P(y))$$
$$\rightarrow \forall y\ (\Box(y\ \varepsilon\ Q) \rightarrow \Box(S \subseteq P(y))),$$
$$\Box\, [x: \exists y\ \varepsilon\ Q\ (x\ \varepsilon\ P(y))] \subseteq S \leftrightarrow \Box \forall y\ \varepsilon\ Q\ (P(y) \subseteq S)$$
$$\rightarrow \forall y\ (\Box(y\ \varepsilon\ Q) \rightarrow \Box(P(y) \subseteq S)).$$

<u>Warnung</u>: Manche modalen Aussageformen sind jedoch <u>nicht invariant</u> bezüglich der Gleichheit von <u>Kennzeichnungen</u> (s. [3], S. 170ff., 190). Beispiel: Fasst man „Abendstern" (AS) bzw. „Morgenstern" (MS) als Abkürzung für die Kennzeichnung „der morgens bzw. abends besonders leuchtende Planet" auf, dann gilt AS=MS (wie Beobachtungen gezeigt haben) und □(AS=AS), aber nicht □(AS=MS). Die Aussageform □(AS=x) ist also nicht invariant.

Zur gestaltlichen oder buchstäblichen Gleichheit von Schreibfiguren: Schreiben wir „P≡Q" für „P ist gestaltlich gleich Q", dann gilt: „Telefon = Fernsprecher" und „Telefon ≡ Telefon", aber nicht „Telefon ≡ Fernsprecher". Die Aussageform „Telefon ≡ x" ist also *nicht invariant* bezüglich „=". Anzumerken ist dazu: In „Telefon = Fernsprecher" werden die Worte „Telefon" und „Fernsprecher" <u>verwendet</u>, in „Telefon ≡ Fernsprecher" (genauer „ „Telefon" ≡ „Fernsprecher" ") wird über sie gesprochen, d.h. sie werden <u>erwähnt</u>.

LITERATUR:
[1] Freytag Löringhoff, Baron v., Bruno: *Logik*, 1955. Desgl. Logik II, 1967.
[2] Gentzen, Gerhard: *Untersuchungen über das logische Schließen*, 1934.
[3] Lorenzen, Paul: *Lehrbuch der konstruktiven Wissenschaftstheorie*, BI 1987.
[4] Petzinger, von, Johann-Michael: *LOGIK im Abriss.* Codex-Verlag 1972. (Hierin werden Ergebnisse aus [1] komprimiert und weitergeführt.)
[5] Strobach, Niko: *Neuere Interpretationen der Aristotelischen Syllogistik,* 3.3.4 mit Ludger Jansen: *Normative Begriffslogik als Syllogistik,* Netz.
[6] Zahn, Peter: *Assertion Games to Justify Classical Reasoning,* tuda-tu-print 75459, 2018.